Lezione3 c1

lunedì 9 marzo 2026 08:03

Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Principio di Archimede

Fissato $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, e sia $y \in \mathbb{R}$ qualunque

Allora $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$n_0 \cdot x > y$$

Dim Per Assurdo, $\exists y \in \mathbb{R}$

ossia, $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $n \cdot x < y$

Ciò si può riscrivere come

$$A = \{ n \cdot x : n \in \mathbb{N} \} \text{ è limitato superiorm.}$$

(perché y è maggiorante per A)

Sia $\boxed{x^* = \sup A}$

Poiché $x > 0 \implies x^* - x < x^*$

Da 2ª sup (vedi prop. caratteristiche)

$\exists\ \bar{n}\cdot x \in A$ (con $\bar{n} \in \mathbb{N}$)

$$x^* - \underbrace{x <} \bar{n}x \le x^*$$

$$\Rightarrow \quad x^* < \bar{n}x + x = (\bar{n}+1)\cdot x \in A$$

$$\Rightarrow \quad x^* = \sup A < (\bar{n}+1)x \in A \qquad \cancel{A}$$

Perché il sup A è maggiorante per A ∎

Conseguenze :

① ℕ non è limitato superiormente

Infatti $x = 1 > 0$

$$\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \quad n > y$$

② $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N},\ n \ge 1 \right\}$

$\Rightarrow \inf A = 0$

Nota che $0 < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (rapporto tra 2 numeri positivi è positivo)

In realtà 0 è il max dei minoranti

Supponiamo che ci sia un minorante $\bar{x} \in \mathbb{R}$ più grande di 0

$\bar{x} \in A_*$ $\qquad \bar{x} > 0$

Utilizzo il principio di Archimede con $y = 1$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \quad n \cdot \bar{x} > 1$

$\Leftrightarrow \quad \bar{x} > \frac{1}{n} \in A \qquad \nexists$

poichè $\bar{x} \in A_*$ deve essere minore di ogni elemento di A

Nota $0 = \inf A$, ma non è elemento

minimo di A, poiché $0 \notin A$

Def (Densità)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che A è densa in $\mathbb{R}$

se $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$

$\exists a \in A$: $x_1 \leq a \leq x_2$

Lemma

Sia $\delta > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$:

$$\delta < y - x$$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : \quad x < n \cdot \delta < y$$

Dim se $x < 0$ e $y > 0$ basta prendere $n = 0$.

Possiamo assumere $0 < x < y$

Per Archimede $\exists n \in \mathbb{N}$ $(n+1) \cdot \delta > x$

poiché $\mathbb{N}$ è ben ordinato, di tutti i multipli di δ che superano x posso prendere il minimo -

Ossia $\exists\, n \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{n\delta < x} < (n+1)\delta$$

Proviamo che $(n+1)\delta < y$

Supponiamo non vale tale diseq.

ossia

$$y < (n+1)\delta$$

$$-x < -n\delta$$

sommo ambo i membri:

$$y - x < (n+1)\delta - n\delta = \delta$$

$$\Rightarrow \qquad y - x < \delta \qquad \xcancel{=}$$

Conclusione

$$x < (n+1)\delta < y \qquad \blacksquare$$

Teorema (densità)

$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

Dim Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$

$$\Rightarrow \qquad x_2 - x_1 > 0 = \inf \left\{ \frac{1}{n} : \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 1 \end{matrix} \right\}$$

2ª inf $\exists\, n \in \mathbb{N} \quad : \quad x_2 - x_1 > \frac{1}{n} > 0$

Utilizzo il lemma precedente con $\delta = \frac{1}{n} > 0$

$$\exists\, m \in \mathbb{Z} : \quad x_1 < \frac{m}{n} < x_2$$

ma $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ■

Proposizione

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists!\, m \in \mathbb{Z} \quad : \quad m < x < m+1$$

Notazione : "$\exists!$" = esiste unico

$m = [x]$ = parte intera di x

Proposizione (Divisione Euclidea)

siano $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b > 0$

Allora $\exists!\ q, r \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{a = bq + r} \quad \text{con} \quad 0 < r < b$$

In realtà, utilizzeremo la divisione Euclidea nei seguenti termini:

$$\boxed{\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}} \quad \text{con } 0 < r < b$$

Potenza di un numero reale

$\forall n \in \mathbb{N}$ se $a \in \mathbb{R}$

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdot\cdot a}_{n\text{-volte}}$$

Se invece $n \in \mathbb{Z}$ con $\boxed{n<0}$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \quad \text{con } \boxed{-n>0}$$

Es

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a\cdot a}$$

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a\cdot a\cdot a}$$

. . . .

Teorema (Radice n-esima)

Se $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ Allora $\forall x \in \mathbb{R}$

con $x>0$

$\exists !\ y \in \mathbb{R}\ (y>0)$:

$$\boxed{y^n = x}$$

Notazione $\boxed{y := \sqrt[n]{x}}$

In particolare, $(\sqrt[n]{x})^n = x$

Analogamente $\sqrt[n]{x^n} = x$

Significato dell'equazione

$$\boxed{y^n = x}$$

① se $x>0 \Rightarrow$ unica soluzione $\underline{\underline{y>0}}$

Però se $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\underline{n \text{ pari:}}}$

$$(-y)^n = y^n = x$$

$\Rightarrow$ $y^n=x$ ha due soluzioni

$$\pm\sqrt[n]{x}$$

caso $\boxed{n \text{ dispari}}$ otteniamo solo la soluzione $y=\sqrt[n]{x}$ (una sola sol.)

Se invece $\boxed{x<0}$

caso $\boxed{n \text{ pari}}$

$$y^n = x$$

$\boxed{x<0}$ mentre il primo membro è sempre positivo $y^n>0$

$\Rightarrow$ $y^n=x$ nessuna soluzione

Se $\boxed{x<0}$ e $\boxed{n \text{ è dispari}}$

l'eq$^{\underline{ne}}$ $y^n = x$

ammette la soluzione

$$y = -\sqrt[n]{-x}$$

Infatti

$$y^n = \left(-\sqrt[n]{-x}\right)^n =$$

$$= -\left(\sqrt[n]{-x}\right)^n =$$

$$= -(-x) = x$$

Oss Dalla definizione $\sqrt[n]{x}$ con

n pari $\Longrightarrow$ $\boxed{x \geq 0}$

Ossia c'è un campo di esistenza

Notazione: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Def Sia $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$

se $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

Definiamo

$$a^q = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Nota $a^q = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m =$

$$= \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Prop Sia $a \in \mathbb{R}$ $a > 0$

Allora $\forall x \in \mathbb{R}$ ha senso l'operazione esponenziale $a^x > 0$ $a^x \in \mathbb{R}$

Come nasce l'operazione a^x

Fisso $x \in \mathbb{R}$, con $\boxed{a>0}$

Considero l'insieme

$$A = \{ a^q : q \in \mathbb{Q} \quad q < x \}$$

Se $\boxed{a>1}$ A è limitato superiorm.

$$\sup A := a^x$$

Proprietà:

(1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(2) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

(3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

(4) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

Proprietà (Monotonia)

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \boxed{a>1} & a^x \le a^y \\ x \le y \iff \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & \boxed{0<a<1} & a^x \ge a^y \end{tikzcd}$$

Teorema

Sia $a \in \mathbb{R}$, $\boxed{a>0}$. Allora la funzione

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$$

definita come $f(x) = a^x$

è una funzione biettiva

Def (Logaritmo) essendo $f: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$

$f(x) = a^x$

è biettiva, nasce la funzione inversa

$$F^{-1} :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\boxed{F^{-1}(y) = x \iff a^x = y}$$

Notazione $F^{-1}(y) = \log_a y$

Dalla definizione:

$$\log_a y = x \iff a^x = y$$

Riscrivo come ① $\log_a a^x = x$

$$② \quad a^{\log_a y} = y$$

Significato: Dalla ① abbiamo che

$\forall x \in \mathbb{R}$ si può sempre riscrivere come

$\log_a y$ (con base scelta da noi!)

Dalla ② $\forall y \in \mathbb{R}$ $\boxed{y>0}$ si può

riscrivere come esponenziale a^z

(con base $a>0$ scelta da noi)

Attenzione L'operazione di logaritmo ha senso solo per argomento $\boxed{y>0}$

Ossia $\log_a y$ ha un campo di esistenza

Proprietà (algebriche)

(1) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

(2) $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$

Attenzione $(\log_a x)^p \neq p \cdot \log_a x$

Caso particolare $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

(3) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(4) Cambiamento di base

se $a, b > 0$ e $x>0$ allora

$$\boxed{\underbrace{\log_a x}_{} = (\log_a b) \cdot \underbrace{\log_b x}_{}}$$

Proprietà (Monotonia)

$$\begin{tikzcd}
 & (a>1)\ \log_a x \le \log_a y \\
0 < x \le y \iff \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & (0<a<1)\ \log_a x \ge \log_a y
\end{tikzcd}$$

Esercizi

Richiamo sulle disequazioni

1° grado $\quad ax + b \geq 0$

$$ax \geq -b$$

$$\begin{tikzcd} & a>0 \quad x \geq -\frac{b}{a} \ (\text{Sol}) \\ {} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & a<0 \quad x \leq -\frac{b}{a} \ (\text{Sol}) \end{tikzcd}$$

2º grado

$$ax^2+bx+c \geq 0$$

$a>0$

$$\boxed{\Delta = b^2-4ac}$$

$\boxed{\Delta \geq 0}$ se $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Rightarrow$ Sol $]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$

Se $\boxed{\Delta<0}$ $\Rightarrow$ Sol $= \mathbb{R}$

Caso $ax^2+bx+c \leq 0$

$a>0$ $\boxed{\Delta \geq 0}$ Sol $[x_1, x_2]$

$\boxed{\Delta < 0}$ Sol $= \emptyset$

Se $P(x)$ è polinomio di grado $n \geq 3$

come studiare $P(x) \geq 0$

① si cerca di decomporre $P(x)$ come prodotto di polinomi o di 2° grado irriducibili oppure di 1° grado

② come decomporre :

(2.1) si va alla ricerca di radici di $P(x) = 0$

Attraverso il teorema del resto :

Se $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$

e supponiamo $a_i \in \mathbb{Z}$ (oppure in $\mathbb{Q}$)

Si considerano tutti i divisori di a_0

presi col segno + e −

e di questi si aggiungono tali

numeri diviso ciascun divisore di a_n

Tra tutti questi candidati si trova

la radice di $P(x) = 0$

Una volta che ho individuato $x_0 : P(x_0) = 0$

si decompone $P(x)$ attraverso

(•) Ruffini

(••) Divido $P(x)$ con $(x - x_0)$

Per ottenere la decomposizione

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - x_0)$$

grado Q = grado $P - 1$

Dopo aver decomposto $P(x)$ per risolvere $P(x) \geq 0$

semplicemente si utilizza la regola dei segni

Esercizio

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n^2} \;:\; \begin{array}{l} n\in\mathbb{N} \\ n\geq 1 \end{array} \right\}$$

cerco maggioranti (se ce ne sono!) per A

sia $x\in\mathbb{R}$: x è maggiorante per A

$$0 \lneq \frac{n+1}{n^2} \leq x \qquad \forall n\in\mathbb{N}^+$$

(so già che $x \gneq 0$)

$$\Longleftrightarrow \quad n+1 \leq x n^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{x n^2 - n - 1 \geq 0} \; (P_n)$$

Impongo che l'insieme delle soluz. $= \mathbb{N}^+$

studio questa diseq. di 2° grado (in n!)

$$\Delta = 1 + 4x > 0$$

$\Longrightarrow$ soluzioni di (P_n) sono

$$\cancel{n \leq \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{2x}} \quad \cup \quad \underbrace{n \geq \frac{1 + \sqrt{1+4x}}{2x}}$$

Conclusione Affinché $x>0$ sia maggiorante per A, deve accadere che tutti gli

$$n \in \mathbb{N}^+ \qquad n \geq \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2x}$$

coincide con $\mathbb{N}^+$

$$\Longleftrightarrow \qquad 1 \geq 1 + \sqrt{1+4x}$$

$2x$

$$\iff 2x \geq 1 + \sqrt{1+4x} \qquad (x>0)$$

$$\iff 2x-1 \geq \sqrt{1+4x}$$

→ se $\boxed{2x-1<0} \Rightarrow$ No sol

ossia $\boxed{x<\frac{1}{2}}$ No maggioranti

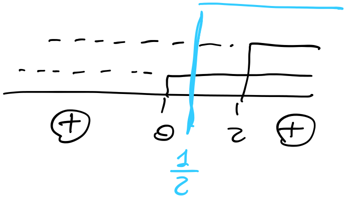
→ se $\boxed{2x-1\geq 0}$ elevo ambo i membri al 2°

$$(2x-1)^2 \geq 1+4x$$

$$4x^2-4x+1 \geq 1+4x$$

$$4x^2-8x \geq 0$$

$$4x(x-2) \geq 0$$



$\Rightarrow$ sol $\boxed{x \geq 2}$

Concludo $A^* = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \}$

$$\Rightarrow \quad \sup A = \min A^* = 2$$

2 effettivamente è $\max A$?

ossia $2 \in A$?

ossia $\exists\, n \in \mathbb{N}^+ : \quad 2 = \frac{n+1}{n^2}$

basta scegliere $\boxed{n=1}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{2 = \max A}$$

Cerchiamo minoranti per A

sia $x \in \mathbb{R}$ minorante per A

(P_n) $\boxed{x \leq \frac{n+1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+}$

Osservo che $0 < \frac{n+1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

ossia $0 \in A_*$

poichè sono alla ricerca del max dei minoranti, cerco $x \in A_*$ $\boxed{x > 0}$

Riscrivo (P_n) come

$$x \cdot n^2 \leq n+1$$

(P_n) $\boxed{x \cdot n^2 - n - 1 \leq 0}$ impongo che le sol $= \mathbb{N}^+$

$$\Delta = 1 + 4x > 0$$

Sol $$\underbrace{\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2x} \leq n}_{\text{verif. banalm}} \underbrace{\leq \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2x}}_{(?)}$$

Impongo che $\mathbb{N}^+$ coincide con tutti

$n \in \mathbb{N}$: $\quad n \leq \dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2x}$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{N}^+$ è limitato sup $\not\equiv$

(vedi conseg ① del principio di Archimede)

Conclusione: che $x>0$ non può essere minorante per A

$$\Longrightarrow \quad 0 = \max A_* = \inf A$$

Nota che 0 non può essere $\min A$